

参考答案

【知识点 1~3 参考答案】

基础篇

1. 解 将 D 的每一行的 -1 提取出来, 总共可以提取 n 次, 因此新行列式的值应该是 $(-1)^n d$.

【考点延伸】知识点 1: 行列式的六大性质之一, 提取某一行(列)的公因子.

2. 解 项 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43} = a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$, 因为 $\tau(41235) = 3$, 所以系数为 $(-1)^3 = -1$.

【考点延伸】知识点 1: 行列式的逆序数定义.

$$\begin{aligned}
 3. \text{ 解 } D &= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{最后一行减去第1行的}a\text{倍}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & a-a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第1列展开}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a-a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{第3行减去第1行的}(a-a^2)\text{倍}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a-a(a-a^2) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a-a(a-a^2) \end{vmatrix} \\
 &= 1 - a^2(1-a+a^2) = 1 - a^2 + a^3 - a^4.
 \end{aligned}$$

【考点延伸】知识点 2: 行列式的展开.

$$4. \text{ 解 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & -1 \\ 0 & -60 & -5 \\ 0 & 16 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -60 & -5 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} = -40.$$

【考点延伸】知识点 1: 行列式的性质 6.

$$5. \text{ 解 } \text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{bmatrix}. \text{ 由 } |A| = |A^T| \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned}
 D = |A^T| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 3 \times 4 \times (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 288.
 \end{aligned}$$

【考点延伸】知识点 3: 范德蒙行列式的计算.

$$6. \text{ 解 } \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第1行减去第2行的}\frac{1}{2}\text{倍}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2} & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第1行减去第3行的}\frac{1}{3}\text{倍}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}\right) n!.$$

当 $n=1$ 时, $D_1=1$, 所以 $D_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}\right) n!, & n \geq 2. \end{cases}$

注: 如果记得爪型行列式的公式, 则可直接套用.

【考点延伸】知识点 3: 爪型行列式的计算.

7. 解 利用加边法, 原式 =
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1 & 2+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & n+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n! \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i}\right).$$

注: 第 2 个等号是将第 $i+1$ 列 ($i=1, 2, \cdots, n$) 减去 x_i 乘以第 1 列化简.

【考点延伸】重要题型 2: 加边法和爪型行列式.

8. 解 注意到该题并没有告知 $\lambda \neq 0$, 如果使用加边法和爪型行列式, 则需要讨论 λ 是否为 0, 但是该题行列式的每一行的行和都相等, 因此可以用另一种特殊的行列式——行和相等的行列式.

当 $n \geq 2$ 时, $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} + \lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n + \lambda \end{vmatrix}$. 将第 1 列到倒数第 2 列全部加到最后一列可得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + \sum_{i=1}^n a_i \\ a_1 & a_2 + \lambda & \cdots & a_{n-1} & \lambda + \sum_{i=1}^n a_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} + \lambda & \lambda + \sum_{i=1}^n a_i \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + \sum_{i=1}^n a_i \end{vmatrix} = \left(\lambda + \sum_{i=1}^n a_i\right) \begin{vmatrix} a_1 + \lambda & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} + \lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

将第 i 列 ($i=1, 2, \cdots, n-1$) 减去最后一列的 a_i 倍可得

$$D_n = \left(\lambda + \sum_{i=1}^n a_i\right) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\lambda + \sum_{i=1}^n a_i\right) \lambda^{n-1} (n \geq 2).$$

当 $n=1$ 时, $D_1 = a_1 + \lambda = (\lambda + a_1)\lambda^{1-1}$ 符合通项, 所以 $D_n = \left(\lambda + \sum_{i=1}^n a_i\right)\lambda^{n-1}$.

【考点延伸】知识点 3: 行和或列和相等的行列式.

9. 解 显然, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$.

依题意可得递推式 $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} (n > 2)$, 移项可得 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$, 所以 $D_n - D_{n-1} = \cdots = D_2 - D_1 = 1$, 则 $D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_2 + n - 2 = n + 1 (n > 2)$.

然后验证 $n=1$ 和 $n=2$ 是否满足通项. 因为 $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, 均满足通项, 故 $D_n = n + 1$.

【考点延伸】重要题型 3: 三对角行列式.

$$\begin{aligned}
 10. \text{ 解 } A_{41} + A_{42} + A_{43} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) - (-1) \times 3 = -9.
 \end{aligned}$$

【考点延伸】知识点 2: 代数余子式的性质.

提高篇

11. 解 先将第 2, 4 列互换, 再将第 2, 4 行互换, 即

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

再利用拉普拉斯展开式可得:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4) (a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

当然, 本题直接展开也很简单, 但计算量可能会大一些.

【考点延伸】知识点 3: 拉普拉斯展开式.

12. 证明 因为矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为非零矩阵, 那么至少有一个元素不为 0. 不妨假设 $a_{11} \neq 0$, 将行列式按第 1 行展开: $|A| = \sum_{i=1}^n a_{1i} A_{1i}$. 因为行列式 $|A|$ 中每个元素与其代数余子式相等, 则 $|A| = \sum_{i=1}^n a_{1i} A_{1i} = \sum_{i=1}^n a_{1i}^2 \geq a_{11}^2 > 0$, 因此 $|A| \neq 0$.

【考点延伸】知识点 2: 行列式的展开.

13. 解 当 $n \geq 2$ 时, 将 D_{2n} 按第 1 列展开, 得

$$\begin{aligned}
 D_{2n} &= \begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & c_1 & d_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix} \\
 &= a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & c_1 & d_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & b_1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & c_1 & d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= [a_n d_n (-1)^{2(2n-1)} - b_n c_n (-1)^{2n-1+1}] D_{2n-2} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2}.
 \end{aligned}$$

由递推关系可得, 当 $n \geq 2$ 时,

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2} = (a_n d_n - b_n c_n) (a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) D_{2(n-2)} = \cdots = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i).$$

验证 $n=1$ 时也符合通项, 所以 $D_{2n} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)$.

【考点延伸】 知识点 2: 行列式的展开.

$$\begin{aligned}
 14. \text{ 解 } \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n A_{i1} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1+x & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x^{n-1}, \\
 \sum_{i=1}^n A_{i2} &= \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1+x & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 & n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & x & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = x^{n-1},
 \end{aligned}$$

同理可得 $\sum_{i=1}^n A_{ij} = x^{n-1} (j=3, 4, \cdots, n)$, 因此 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = nx^{n-1} (n \geq 2)$.

当 $n=1$ 时, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = A_{11} = a_{11} = 1+x$, 所以 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \begin{cases} 1+x, & n=1, \\ nx^{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$

【考点延伸】 知识点 2: 代数余子式的性质.

15. **证明** 不失一般性, 假设第 1 行元素全为 k , 则

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k & \cdots & k \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\text{因为 } \sum_{j=1}^n A_{1j} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|A|}{k}, \text{ 当 } i \in [2, n] \text{ 时,}$$

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} = \begin{vmatrix} k & k & \cdots & k \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \frac{1}{k} |A|.$$

【考点延伸】知识点 2: 代数余子式的性质.

【知识点 4~9 参考答案】

基础篇

1. 解 $|AB| = |A||B|$, 若 A 或 B 不可逆, 则 $|AB| = 0$, 所以 AB 不可逆, C 正确.

A 选项, 若 $A=E$, $B=O$, 显然 A 可逆, 但是 $AB=O$ 不可逆.

B 选项, $A=E$, $B=-E$, 显然 A 与 B 可逆, 但是 $A+B=O$ 不可逆.

D 选项, $A=E$, $B=O$, 显然 B 不可逆, 但是 $A+B=E$ 可逆.

【考点延伸】知识点 5: 可逆矩阵的定义.

2. 解 矩阵 B 可由 A 经过有限次初等变换而来, 因此 $r(A) = r(B)$. 若 $|A| = 0$, 那么 $r(A) < n$, 因此 $r(B) < n$, $|B| = 0$, 所以选择 D.

【考点延伸】重要题型 2: 初等变换和初等矩阵.

$$3. \text{ 解 } |A^*| = |A|^{3-1} = 4, |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}, |2A^2| = 2^3 |A|^2 = 32.$$

【考点延伸】重要题型 4: 伴随矩阵的计算.

$$4. \text{ 解 } |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| = |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| = -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| +$$

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = -m + n.$$

【考点延伸】重要题型 1: 矩阵行列式的运算.

5. 解 依题意可知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B$, $B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$, 因此 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$, 则

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】重要题型 2: 初等变换和初等矩阵.

6. 解 由 $A^* \neq O$ 可得 $r(A) \geq 5$, 又因为 $|A| = 0$, 所以 $r(A) < 6$, 因此 $r(A) = 5$.

事实上, 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1 (n \geq 2), \\ 0, & r(A) < n-1 (n \geq 2). \end{cases}$

【考点延伸】重要题型 6: 矩阵的秩.

7. 解 先求分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 的逆. 利用知识点 7 的例 1 设未知数求逆矩阵的方法可得 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}. \text{ 又因为 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】知识点 7: 分块矩阵的计算.

8. 解 $ABA^* = 8BA^{-1} + 12E \Rightarrow ABA^* - 8BA^{-1} = 12E \Rightarrow |A|ABA^{-1} - 8BA^{-1} = 12E$.

由于 $|A| = 4$, 则 $4AB - 8B = 12A \Rightarrow (A - 2E)B = 3A$.

由于 $|A - 2E| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, 所以 $A - 2E$ 可逆.

用初等行变换化可求得 $(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$, $B = 3(A - 2E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

【考点延伸】重要题型 1: 矩阵的运算.

9. 证明 由于 $A, B, A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵, 因此 $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = [A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1} = B(A+B)^{-1}A$.

【考点延伸】重要题型 3: 求抽象矩阵的逆矩阵.

10. 解 (1) $A+B=AB \Rightarrow AB-A-B=0 \Rightarrow AB-A-B+E=E \Rightarrow (A-E)(B-E)=E, (B-E)^{-1}=A-E$.

(2) 由 (1) 可得 $A = (B-E)^{-1} + E$.

由于 $[B-E|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$, 所以

$$A = (B - E)^{-1} + E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】重要题型 1: 矩阵的运算.

提高篇

11. 证明 由条件可知 $A^* = |A|A^{-1}$, $B^* = |B|B^{-1}$.

由 A, B 均为可逆矩阵可得 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 也为可逆矩阵, 于是 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵等于 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}$.

由知识点 3 拉普拉斯展开式可得 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B|$, 再根据分块矩阵求逆可得 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

于是

$$\text{原式} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & |A| |B| B^{-1} \\ |A| |B| A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & |A| B^* \\ |B| A^* & O \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】伴随矩阵的计算和分块矩阵的计算.

12. 解 利用特殊值法, 不妨假设 $n=1$, 所以 $A=[1]$, $A^{-1}=[1]$, 再根据 $|C - BA^{-1}B| = 2$, 可设

$$C = [3], B = [1], \text{ 所以 } \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

方法 1: 设 $X = \begin{bmatrix} E & O \\ -BA^{-1} & E \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix}$, 则

$$XYZ = \begin{bmatrix} E & O \\ -BA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C - BA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & C - BA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

因为 $|X| = |Z| = |E| |E| = 1$ (拉普拉斯展开式), 而 $|XYZ| = |A| |C - BA^{-1}B| = 1 \times 2 = 2$, 所以

$$|Y| = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{|XYZ|}{|X| |Z|} = 2.$$

方法 2: $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B - BA^{-1}A & C - BA^{-1}B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & C - BA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |C - BA^{-1}B| = 2.$

【考点延伸】知识点 7: 分块矩阵的计算.

13. 解 因为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2k-2 & 3k-3 \\ 0 & 2k-2 & -3k^2+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2) \end{bmatrix} = B$, 所以

当 $k=1$ 时, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 即 $r(A) = r(B) = 1$; 当 $k=-2$ 时, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 即 $r(A) = r(B) = 2$; 当

$k \neq 1, k \neq -2$ 时, $r(A) = r(B) = 3$.

【考点延伸】知识点 9: 矩阵的秩.

14. 证明 (1) 设 $A = [a_{ij}]$, 直接计算 AA^T , 其主对角线上的元素为 $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 (i=1, 2, \cdots, n)$. 因

为 a_{ij} 为实数且 $AA^T = O$, 所以 $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0 (i=1, 2, \cdots, n)$, 因此 $A=O$.

(2) 因为 $(CA - DA)(CA - DA)^T = (CA - DA)(A^T C^T - A^T D^T) = (CAA^T - DAA^T)(C^T - D^T) = O$, 且 A, C, D 为实方阵, 所以 $CA - DA$ 为实方阵, 由 (1) 可知 $CA - DA = O$, 即 $CA = DA$.

注: 当 A 为实方阵时, 利用“ $AA^T = O$ 或 $A^T A = O$ 当且仅当 $A = O$ ”来证明一个实方阵为零矩阵是一种有用的方法, 事实上, 这个结论对于任意的 $m \times n$ 矩阵 A 都成立.

【考点延伸】矩阵的运算: 若 $A^T A = O$, 则 $A = O$.

$$15. \text{ 证明 } \text{若 } A \text{ 的每行元素之和为 } A, \text{ 则 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = Aa \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = aA \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

依次递推下去可得 $A^m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = a^m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^m \\ a^m \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}$, 即 A^m 的每行元素之和为 a^m .

【考点延伸】矩阵的行和的表示.

【知识点 10~15 参考答案】

基础篇

1. 解 D 选项正确.

根据线性相关的定义, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示, 则

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关. (如果本题 $s=2$, 则 B 选项和 C 选项也正确)

【考点延伸】知识点 11: 线性相关的定义.

2. 解 C 选项正确.

线性相关的充要条件是: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中存在一个向量可由其余向量线性表示. 所以线性无关的充要条

件是: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示. (如果本题 $s=2$, 则 B 选项和 D 选项也正确)

【考点延伸】知识点 11: 线性无关的定义.

$$3. \text{ 解 } \text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 由题干可知 } r(A) = 2 \Rightarrow k = 3.$$

【考点延伸】知识点 15: 向量空间的维数.

$$4. \text{ 解 } [b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}, \text{ 当 } K \text{ 不可逆时, } b_1, b_2, b_3 \text{ 线性相关,}$$

此时, $|K| = k + 2 = 0$, 即 $k = -2$.

【考点延伸】重要题型 1: 利用矩阵的秩证明线性相关性.

5. 解 记 $B = [\beta + ka_1, \beta + ka_2, \dots, \beta + ka_m]$, $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, 由已知关系

$\beta = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ 可得到 $B = AK$, 其中

$$K = \begin{bmatrix} 1+k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+k \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

由于 $|K| = (k+m)k^{m-1}$, 因此当 $k = -m$ 或 $k = 0$ 时, $\beta + ka_1, \beta + ka_2, \dots, \beta + ka_m$ 线性相关, 否则线性无关.

【考点延伸】重要题型 1: 利用矩阵的秩证明线性相关性.

$$6. \text{ 解 } [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 故向量组的秩为 } 2,$$

a_1, a_2 是一个极大线性无关组.

【考点延伸】重要题型 3: 极大线性无关组的定义和求法.

7. 证明 采用反证法, 设 $a_1, a_2, a_3, \beta + \gamma$ 线性相关, 则存在不全为 0 的数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 (\beta + \gamma) = 0$.

若 k_4 为 0, 则 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$, 由 a_1, a_2, a_3 线性无关可知 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 这与 k_1, k_2, k_3, k_4 不全为 0 矛盾, 从而 k_4 不为 0, 那么 $\gamma = -\frac{k_1}{k_4} a_1 - \frac{k_2}{k_4} a_2 - \frac{k_3}{k_4} a_3 - \beta$.

根据题干, β 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 所以 γ 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 这与向量 γ 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示矛盾, 所以向量组 $a_1, a_2, a_3, \beta + \gamma$ 线性无关.

【考点延伸】重要题型 2: 用定义和重要结论证明线性相关性.

8. 解 因为 a_1 和 a_2 线性无关, 且 a_1, a_2 是向量空间 V 的基.

利用施密特正交化方法, 取

$$\beta_1 = a_1, \quad e_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{15}} [1, 1, 2, 3]^T,$$

$$\beta_2 = a_2 - \frac{(\beta_1, a_2)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = [-1, 1, 4, -1]^T - \frac{1}{3} [1, 1, 2, 3]^T$$

$$= \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -2 \right]^T = \frac{2}{3} [-2, 1, 5, -3]^T,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{39}}[-2, 1, 5, -3]^T,$$

即 V 的标准正交基为 $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}[1, 1, 2, 3]^T$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}[-2, 1, 5, -3]^T$.

【考点延伸】知识点 14: 利用施密特正交化方法求标准正交向量组.

9. 解 (1) 设过渡矩阵为 C , 由定义可得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} C$, 所以

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 由 } X=CY \text{ 可得 } Y=C^{-1}X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】重要题型 4: 向量坐标和坐标变换.

10. 证明 设有数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$.

上式两边与 α_1 作内积, 由 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0, (\alpha_1, \alpha_3) = 0$ 得

$$k_1(\alpha_1, \alpha_1) + k_2(\alpha_1, \alpha_2) + k_3(\alpha_1, \alpha_3) = k_1(\alpha_1, \alpha_1) = 0.$$

又由于 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 则 $(\alpha_1, \alpha_1) > 0$, 因此 $k_1 = 0$. 同理两边与 α_2 作内积可得 $k_2 = 0$, 两边与 α_3 作内积可得 $k_3 = 0$,

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

【考点延伸】重要题型 2: 用定义和重要结论证明线性相关性.

提高篇

11. 证明 假设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k(\alpha + \beta) = \mathbf{0}$, 因为 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合, 所以

$\alpha = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_s\alpha_s$. 代入上式整理可得:

$$(k_1 + km_1)\alpha_1 + (k_2 + km_2)\alpha_2 + \cdots + (k_s + km_s)\alpha_s = -k\beta.$$

由于 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, $k = 0$ (否则 $\beta = -\sum_{i=1}^s \frac{k_i + km_i}{k} \alpha_i$), 则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

又由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则 k_1, k_2, \cdots, k_s 全为 0. 因此, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k(\alpha + \beta) = \mathbf{0}$

仅在 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k = 0$ 时成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha + \beta$ 线性无关. (注: 本题是第 7 题的一般形式,

因此也可以用反证法做)

【考点延伸】重要题型 2: 用定义和重要结论证明线性相关性.

12. 解 (1) 若 $s > n$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 (向量个数超过向量维数时, 向量组必然线性相关).

(2) 若 $s = n$, 则由范德蒙行列式可知 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j)$. 因为

a_1, a_2, \dots, a_s 是 s 个互不相同的数, 则 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

(3) 若 $s < n$, 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{s-1} & a_2^{s-1} & \cdots & a_s^{s-1} \end{vmatrix} = \prod_{s \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j) \neq 0$, 所以向量组 $\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1^{s-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2^{s-1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ a_s \\ \vdots \\ a_s^{s-1} \end{bmatrix}$

线性无关.

根据原来无关 \Rightarrow 延长无关可得向量组 $\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1^{s-1} \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2^{s-1} \\ \vdots \\ a_2^{n-1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ a_s \\ \vdots \\ a_s^{s-1} \\ \vdots \\ a_s^{n-1} \end{bmatrix}$ 线性无关.

【考点延伸】重要题型 2: 用定义和重要结论证明线性相关性.

13. 证明 (1) 因为向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 所以 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$.

又由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 因此 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$, 与 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$ 矛盾, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 设 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] A$, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关, 所以 A 为三阶可逆矩阵, 因此 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] A^{-1}$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价.

【考点延伸】知识点 13: 等价向量组的定义和性质.

14. 证明 行列式可利用分块运算表示为

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n].$$

取矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 则 $A^T = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}$.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$,
$$\begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix} = |A^T A| = |A|^2,$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix} \neq 0$.

【考点延伸】知识点 10: 向量的内积. 知识点 11: 线性无关的充要条件.

15. 证明 因为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4 \iff$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关, 所以首先分析题目所给向量组的线性相关性.

由 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ 可得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 从而 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即 $\alpha_4 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3$.

由 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$ 可得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关.

任取数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 (\alpha_5 - \alpha_4) = \mathbf{0}$, 代入 $\alpha_4 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3$, 经整理可得

$$(k_1 - k_4 l_1) \alpha_1 + (k_2 - k_4 l_2) \alpha_2 + (k_3 - k_4 l_3) \alpha_3 + k_4 \alpha_5 = \mathbf{0}.$$

由向量组 (III) 线性无关可得 $\begin{cases} k_1 - k_4 l_1 = 0, \\ k_2 - k_4 l_2 = 0, \\ k_3 - k_4 l_3 = 0, \\ k_4 = 0, \end{cases}$ 从中解得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$

线性无关, 从而有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$.

【考点延伸】重要题型 2: 用定义和重要结论证明线性相关性.

【知识点 16~18 参考答案】

基础篇

1. 解 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解, 应满足 $r(A) < n$, 则 A 的列向量组线性相关, 所以选择 D.

【考点延伸】重要题型 5: 齐次方程组解的结构.

2. 解 齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的通解加上 $AX = b$ 的一个特解即非齐次线性方程组 $AX = b$ 的通解.

因为 $r(A) = 2$, 则 $AX = \mathbf{0}$ 的线性无关解的个数为 $4 - 2 = 2$. 又因为 α_1, α_2 是导出方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的线性无

关的解, 则 $AX=0$ 的通解为 $m\alpha_1+n\alpha_2$ (m, n 是任意常数).

A 选项, 因为 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2\alpha_2=k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的通解, 且 $\frac{1}{2}A(X_1+X_2)=\beta$, 则 $\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ 是 $AX=\beta$ 的一个特解, 因此 $\frac{1}{2}(X_1+X_2)+k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2\alpha_2$ (其中 k_1, k_2 为任意常数) 是 $AX=\beta$ 的通解, 故 A 正确.

B 选项, 因为 $\frac{1}{2}A(X_1-X_2)=0$, 所以 $\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ 不是 $AX=\beta$ 的一个特解, 故 B 错误.

C 选项, X_1-X_2 可能为 0 , 也可能恰好是 α_2 , 因此不能保证 $AX=0$ 有 2 个线性无关的解, 故 C 错误.

D 选项, $X_1+k_1(X_1+X_2)$ 不是 $AX=\beta$ 的一个特解, 故 D 错误.

【考点延伸】重要题型 5: 非齐次方程组解的结构.

3. 解 选择 D 选项.

因为 $r(A)=n-1$, 故 $Ax=0$ 有一线性无关的非零解.

又因为 ξ_1, ξ_2 是齐次方程组 $Ax=0$ 的 2 个不同解, 则 $\xi_1-\xi_2$ 一定是 $Ax=0$ 的非零解, $k(\xi_1-\xi_2)$ ($k \in \mathbf{R}$) 是 $Ax=0$ 的通解.

由于 B 是 A 去掉一行而来的 (仍是 A 的一部分), 故 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 必可用行初等变换化为 $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$, 因此 $k(\xi_1-\xi_2)$ ($k \in \mathbf{R}$) 是 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}x=0$ 的通解.

A 选项, ξ_1 可能是零向量, 因此 A 错误.

B 选项, $kB\xi_2=0_{(m-1) \times 1}$ 显然不是通解, 故 B 错误.

C 选项, $A\xi_1$ 和 $B\xi_2$ 的行数都不相同, 因此不能做减法, 故 C 错误.

【考点延伸】重要题型 1: 齐次线性方程组的解.

4. 解 显然 $A=[1, 2, \dots, n]$, 则 $r(A)=1$, 故它的基础解系中所含向量的个数为 $n-1$.

【考点延伸】知识点 16: 齐次线性方程组的基础解系.

5. 解 根据各行元素和为 0, 那么 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由于 $r(A)=3, n=4$, 那么解集中线性无关的解的个数不超过 $n-r=1$ 个, 因此找到齐次方程组的解为 $k[1, 1, 1, 1]^T$.

由 $\beta=\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3$ 可知 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta$, 所以找到特解为 $[1, -2, -3, 0]^T$.

综上, 通解为: $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (k 为任意常数).

【考点延伸】重要题型 2: 非齐次线性方程组的解.

6. 解 矩阵秩的性质: 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1 \ (n \geq 2), \text{ 因为 } r(A) = 4-1=3, \text{ 所} \\ 0, & r(A) < n-1 \ (n \geq 2). \end{cases}$

以 $r(A^*) = 1$, 则 $4 - r(A^*) = 3$, 即 $A^*x = 0$ 有 3 个线性无关的解.

【考点延伸】重要题型 3: 伴随矩阵的齐次方程组.

7. 解 $[A|b] = \begin{bmatrix} -1 & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & -5\lambda+5 & -6 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & 0 & 5\lambda+4 & 9 \end{bmatrix}.$

当 $r(A) = r(A|b) = 3$ 时, 方程组有唯一解, 此时 $|A| \neq 0$, 则 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$.

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) = 2$, $r(A|b) = 3$, 方程组无解.

当 $\lambda = 1$ 时, $[A|b] \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时 $r(A) =$

$r(A|b) = 2 < n = 3$, 方程组有无穷个解.

将 x_2 视为自由变量, 则通解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c \in \mathbf{R}$).

【考点延伸】重要题型 2: 非齐次线性方程组的解.

8. 解 联立题干中的方程组得 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = \lambda, \end{cases}$ 对新方程组的增广矩阵 $[A|b]$ 施以初等行变换:

$$[A|b] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda = 0$ 时, $r(A|b) = r(A)$, 2 个方程组有公共解.

将 x_4 作为自由变量, 全部公共解为 $\begin{cases} x_1 = -3 + 6k, \\ x_2 = 3 - 5k, \\ x_3 = -1 + 3k, \\ x_4 = k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{R} \text{ 或写成 } x = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$

【考点延伸】重要题型 6: 求公共解.

9. 解 记矩阵 $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$, $[A|b] = [a_1, a_2, a_3, a_4|b] =$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right].$$

(1) 当 $a = -1$ 且 $b \neq 0$ 时, $r(A) \neq r(A|b)$, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

(2) 当 $a \neq -1$ 时, $r(A) = r(A|b) = 4$, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 唯一线性表示.

(3) 当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, $r(A) = r(A|b) = 2$, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 但不唯一.

【考点延伸】重要题型 4: 向量的线性表示问题.

10. 证明: $A_{m \times n} = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = n$.

因为 $r(A^T A) = r(A)$ (知识点 18 的结论), 则 $r(A^T A) = n$, 所以 n 阶方阵 $A^T A$ 为满秩矩阵, $A^T A$ 可逆.

在方程组 $Ax = b$ 两端同时乘以 A^T 可得 $A^T Ax = A^T b$, 则 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

【考点延伸】重要题型 2: 非齐次线性方程组的解.

提高篇

11. 解 B 选项正确.

因为 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等, 所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{4 \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j) \neq 0$, 由此可得矩阵 $H =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$ 的秩为 4, 则矩阵 H 的行向量线性无关.

因为矩阵 A 是矩阵 H 的前 3 行, 则根据知识点 11 线性相关和线性无关的重要结论 (整体无关 \Rightarrow 部分无关)

可得矩阵 A 的行向量线性无关, 因此 $r(A) = 3$. 再由知识点 18 中的结论可知 $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = 3$.

结合 $A_{m \times n} x = 0$ 有解的条件 $\begin{cases} r(A) = n \Rightarrow \text{仅有零解,} \\ r(A) = r < n \Rightarrow \text{有 } n-r \text{ 个线性无关非零解,} \end{cases}$ 所以:

(1) $r(A) = 3 < n = 4 \Rightarrow A_{3 \times 4} x = 0$ 有非零解.

(2) $r(AA^T) = 3 = n \Rightarrow (AA^T)_{3 \times 3} x = 0$ 只有零解.

(3) $r(A^T) = 3 = n \Rightarrow A_{4 \times 3}^T x = 0$ 只有零解.

【考点延伸】知识点 16: 齐次方程组有解的充要条件.

12. 证明 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解, 即 $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b, A\alpha_3 = b$, 则 $\alpha_1 - \alpha_2,$

$\alpha_1 - \alpha_3$

是 $Ax=0$ 的解.

因为 $\alpha_1 - \alpha_2 = [-1, 9, 9, 9]^T$, $\alpha_1 - \alpha_3 = [-1, 9, 9, 8]^T$, $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$ 是齐次线性方程 $Ax=0$ 的线性无关的解, 因此 $4 - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$.

根据矩阵秩的性质, 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1 (n \geq 2), \text{ 那么 } r(A) \leq 2 < 4-1=3, \\ 0, & r(A) < n-1 (n \geq 2), \end{cases}$

所以 $r(A^*) = 0$, 即 $A^* = 0$.

【考点延伸】重要题型 5: 齐次 (非齐次) 方程组解的结构.

13. **解** 首先证明 $AX=0$ 的解是 $A^2X=0$ 的解:

假设 α 是 $AX=0$ 的解, 则 $A\alpha=0$. 方程左右两边同时乘以 A 可得 $A^2\alpha=0$, 即 $AX=0$ 的解是 $A^2X=0$ 的解.

再证明 $A^2X=0$ 的解是 $AX=0$ 的解:

假设 η 是 $A^2X=0$ 的解, 所以 $A^2\eta=0$. 在方程左右两边同时乘以 η^T 可得 $\eta^T A^2\eta=0$ (注意: 等式右边的 0 是常数).

由于 A 为实对称矩阵, $A=A^T$ 且 $A\eta$ 为 n 维列向量, 于是 $\eta^T A^2\eta = \eta^T A^T A\eta = (A\eta)^T (A\eta) = 0$, 即 $(A\eta, A\eta) = 0$ (括号表示向量的内积). 因此, $A\eta=0$, 即 $A^2X=0$ 的解是 $AX=0$ 的解.

综上, 齐次线性方程组 $A^2X=0$ 与 $AX=0$ 同解.

【考点延伸】知识点 18: 方程组解的理论延伸——方程组同解.

14. **证明** (1) 因为对于任意的 $i \in [0, r]$, 都有 $A\alpha_{n-i} = \beta$, 所以对于任意的 $i \in [1, r]$, 都有 $A(\alpha_{n-i} - \alpha_0) = A\alpha_{n-i} - A\alpha_0 = \beta - \beta = 0$.

又因为 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性无关, 因此它们互不相等, 即对于任意的 $i \in [1, r]$, $\alpha_{n-i} - \alpha_0 \neq 0$, 则对于任意的 $i \in [1, r]$, $\alpha_{n-i} - \alpha_0$ 是导出方程组 $Ax=0$ 的非零解.

(2) 因为 $r(A) = r$, 所以 $Ax=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个解向量.

由 (1) 可得 $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_0, \dots, \alpha_{n-r} - \alpha_0$ 是 $Ax=0$ 的 $n-r$ 个解向量.

接下来证明它们线性无关:

设有实数 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 使得 $k_1(\alpha_1 - \alpha_0) + k_2(\alpha_2 - \alpha_0) + \dots + k_{n-r}(\alpha_{n-r} - \alpha_0) = 0$, 则

$$-(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r})\alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} = \mathbf{0}.$$

由题意可知 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 线性无关, 所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 因此 $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_0,$

$\cdots, \alpha_{n-r} - \alpha_0$ 线性无关, 它们是基础解系.

【考点延伸】重要题型 5: 齐次方程组解的结构.

15. **证明** (1) 假设 $k_0\beta + k_1(\alpha_1 + \beta) + k_2(\alpha_2 + \beta) + \cdots + k_s(\alpha_s + \beta) = \mathbf{0}$, 则 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_s)\beta +$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

若 $k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $k_1 = k_2 = \cdots =$

$k_s = 0$, 所以 $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0 \implies \beta, \alpha_1 + \beta, \cdots, \alpha_s + \beta$ 线性无关.

若 $k_0 + k_1 + \cdots + k_s \neq 0$, 那么 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, β 也应是 $|A| = 0$ 的解, 这显然不可能,

所以 $k_0 + k_1 + \cdots + k_s$ 只能为 0.

下面证明 $\beta, \alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \cdots, \alpha_s + \beta$ 是 $Ax = b$ 的解:

因为 $A\alpha_i = \mathbf{0} (i=1, 2, \cdots, s)$, $A\beta = b$, 则 $A(\alpha_i + \beta) = b$, 所以 $\beta, \alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \cdots, \alpha_s + \beta$ 是

$Ax = b$ 的 $s+1$ 个线性无关的解.

(2) 若 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}$ 为 $Ax = b$ 的 $s+2$ 个线性无关的解, 根据第 14 题 (2) 的结论可知,

$\beta_2 - \beta_1, \beta_3 - \beta_2, \beta_4 - \beta_3, \cdots, \beta_{s+2} - \beta_{s+1}$ 应为 $|A| = 0$ 的 $s+1$ 个线性无关的解, 显然, $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系

只有 s 个元素, 所以矛盾.

【考点延伸】重要题型 5: 非齐次方程组解的结构.

【知识点 19~24 参考答案】

基础篇

1. **解** B 相似于 A , 则 B 的特征值也为 $0, 1, 2, \cdots, n-1$, $B+E$ 的特征值为 $1, 2, \cdots, n$, 所以

$|B + E| = n!$ (矩阵的行列式等于所有特征值的积).

【考点延伸】知识点 19: 利用特征值的性质求行列式.

$$2. \text{解 } A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A \text{ 为负定矩阵} \iff \begin{cases} -1 < 0, \\ (-1) \times (-1) - \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} > 0, \\ |A| < 0, \end{cases} \text{ 则 } 1 - \frac{a^2}{4} > 0, -2 < a < 2.$$

【考点延伸】知识点 24: 负定矩阵的充要条件.

3. 解 利用特殊值法, 取 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 由此可得 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 1, 0, 0, 则

$A = E + k\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1+k$, 1, 1.

要使 A 为正定矩阵, 则 A 的所有特征值均要大于 0, 则 $1+k > 0$, 即 $k > -1$.

注: $\alpha\alpha^T$ 的特征值的严格证明见第 12 题.

【考点延伸】重要题型 7: 正定矩阵的性质和证明.

4. 解 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $\det(\lambda E - A) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3)$, 所以 $\lambda = -1$, $\lambda = -2$, $\lambda = 3$, 则

$p=1$, $q=2$.

【考点延伸】知识点 23: 正惯性系数和负惯性系数.

5. 解 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 可得 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix}$, 则 $\begin{cases} 3-4-3=\lambda, \\ a+4+6=-2\lambda, \\ 3-2b-3=3\lambda, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-4, \\ a=-2, \\ b=6, \end{cases}$ 所以

$a+b=4$.

【考点延伸】重要题型: 已知特征值或特征向量求未知参数.

6. 解 A 的特征值为 3, 0, μ , 且 $|A|=0$. A 有一个特征值为 3, 且 $|A|=3 \times (\lambda-4)$.

(1) 若 A 与 A 相似, 则 A 与 A 的特征值相同, 且 $|A|=|A|$, 可得 $\lambda=4$. 由于 $|A|=0$, 则 A 有一个特征值为 0, 另一个特征值为 $\text{tr}(A) - 0 - 3 = 5$, 所以 $\mu=5$.

(2) 若 A 与 A 合同, 显然 A 的和 A 都是实对称矩阵, 则 A 和 A 的正、负惯性系数相同. 由于 A 有一个特征值为 0, 则 A 有一个特征值为 0, 所以 $|A|=0$, 可得 $\lambda=4$. 由于 A 的另一个特征值为 $\text{tr}(A) - 0 - 3 = 5$, 则 A 的正惯性系数为 2, 所以 $\mu > 0$.

【考点延伸】知识点 20: 矩阵相似的充要条件. 知识点 23: 矩阵合同的充要条件.

7. 解 由题干可知 A 为实对称矩阵, 则 A 可相似对角化. 由于 A 的行和为 1, 则 A 有一个特征值为 1, 另一个特征值为 $\text{tr}(A) - 1 = 3$.

当 $\lambda_1=1$ 时, $\lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2=3$ 时, $\lambda_2 E - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

令 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

由于 $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{2016} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2016} \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+3^{2016} & 1-3^{2016} \\ 1-3^{2016} & 1+3^{2016} \end{bmatrix}$.

【考点延伸】重要题型 4: 求矩阵的高次幂.

8. 解 二次型对应的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

因为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$.

对于特征值 0, 解方程组 $(0E - A)x = 0$ 可得特征向量 $\alpha_1 = [1, 1, 1]^T$, 单位化得

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1]^T.$$

对于特征值 2, 解方程组 $(2E - A)x = 0$ 可得特征向量 $\alpha_2 = [-1, 1, 0]^T$, 单位化得

$$\eta_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1, 1, 0]^T.$$

对于特征值 6, 解方程组 $(6E - A)x = 0$ 可得特征向量 $\alpha_3 = [1, 1, -2]^T$, 单位化得

$$\eta_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}} [1, 1, -2]^T.$$

令 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, 故二次型 $f(X)$ 经正交线性变换 $X = PY$ 化为标准形

$$g(Y) = 0y_1^2 + 2y_2^2 + 6y_3^2 = 2y_2^2 + 6y_3^2.$$

【考点延伸】重要题型 6: 二次型的标准化.

9. 证明 由于 A 为实对称矩阵 (设 A 阶数为 n), 则 A 可相似对角化, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PAP^{-1}$.

由于 $A^k = PA^kP^{-1} = E$, 所以 $A^k = P^{-1}EP = E$, 可得 $\lambda_i^k = 1 (i=1, 2, \dots, n)$. 由于 A 是正定矩阵, 所以 A 的所有特征值均大于 0, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, 可得 $A = E$, 则 $A = PAP^{-1} = PEP^{-1} = E$.

【考点延伸】重要题型 7: 正定矩阵的性质和证明.

10. 证明 由于 A 为正定矩阵, 则 $A^T = A$.

由于 $(P^TAP)^T = P^TA^TP = P^TAP$, 则 P^TAP 对称.

对于任意非零 n 维列向量 x , 因为 P 可逆, 则 $Px \neq 0$. 所以由 A 是正定矩阵可得 $x^T P^TAPx = (Px)^TAPx > 0$, 即 P^TAP 正定.

【考点延伸】重要题型 7: 正定矩阵的性质和证明.

提高篇

11. 解 因为 $A_{n \times n}$ 是一个实对称矩阵, 则 A 一定可相似对角化, 所以

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}, \quad A^m = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1},$$

由于 $A^m = O$, 那么 $r(A^m) = 0$.

根据与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩的性质, 可得

$$r \left(\begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix} \right) = r(A^m) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{由于 } A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}, \text{ 所以 } r(A) = r \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) = 0, \text{ 即 } A = O_{n \times n}.$$

【考点延伸】知识点 21: 实对称矩阵的性质.

12. 解 设 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, 则 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = 1$.

$$\text{由于 } \alpha \alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \operatorname{tr}(\alpha \alpha^T) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

由于 $r(\alpha \alpha^T) \leq r(\alpha) \leq 1$, 而 $\alpha \alpha^T$ 不为零矩阵, 则 $\alpha \alpha^T$ 的秩为 1.

根据特征值的性质, 若 A 的秩为 1, 则 A 有一个特征值为 $\operatorname{tr}(A)$, 其余特征值全为 0, 所以 $\alpha \alpha^T$ 的特征值为 1, 其余 $n-1$ 个特征值均为 0.

【考点延伸】重点题型 1: 求特征值.

13. 证明 由于 A, B 正定, 则 A, B 均为对称矩阵 $\Rightarrow A^T = A, B^T = B$, 则 $(AB)^T = B^T A^T = BA$. 又由于 $AB = BA \Rightarrow (AB)^T = BA = AB$, 所以 AB 也对称.

由 A 正定 (A 的特征值都大于 0) 可知, A 可逆 (因为 A 的行列式等于所有特征值的积) 且 A^{-1} 也正定 (A^{-1} 的特征值等于 A 特征值的倒数).

由 $ABx = \lambda x$ (x 为特征向量, 所以不可能是零向量) 可得 $Bx = \lambda A^{-1}x$, 两边同时左乘 x^T 可得 $x^T Bx = \lambda x^T A^{-1}x$.

由于 B 和 A^{-1} 均正定, 则 $x^T Bx > 0, x^T A^{-1}x > 0$, 可得 $\lambda > 0$, 即 AB 的特征值均大于 0, 所以 AB 正定.

【考点延伸】重要题型 7: 正定矩阵的性质和证明.

14. 解 设 A 的特征值为 λ , 则 $2E - A$ 的特征值为 $2 - \lambda$.

由于 $A^2 = A$, 且 $r(A) = 3$, 根据知识点 20 的例 1 可知, A 有 3 个特征值为 1, 2 个特征值为 0, 所以 $2E - A$ 的特征值为 1, 1, 1, 2, 2, 则 $\det(2E - A) = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$.

【考点延伸】知识点 20: 矩阵相似对角化.

15. 证明 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 因为 $|A| > 0$, 则 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n > 0$. 又由于 n 为奇数, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中至少有一个大于 0.

不妨设 $\lambda_1 > 0$, 由于 A 为实对称矩阵, 则 A 可相似对角化, 即存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^T A Q = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

令 $X = QY$, 则 $X^T A X = Y^T Q^T A Q Y = Y^T A Y$. 取 $Y_0 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$, 则 $Y_0^T A Y_0 = \lambda_1 > 0$, 此时取 $X = QY_0$, 且 $X^T A X = Y_0^T A Y_0 > 0$.

【考点延伸】知识点 21: 实对称矩阵的对角化.